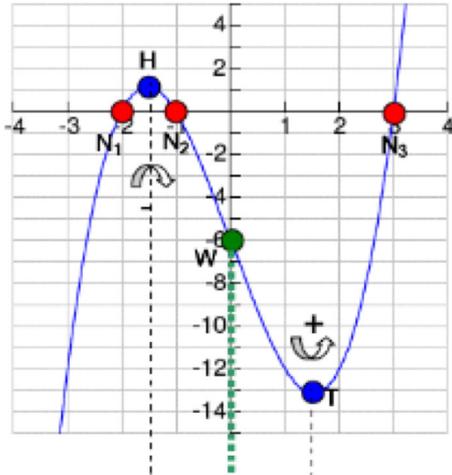
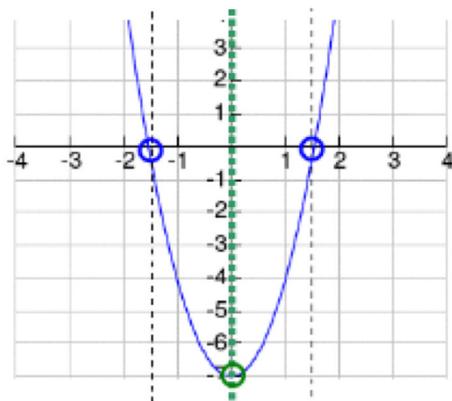


# Steigen/Fallen, Krümmung

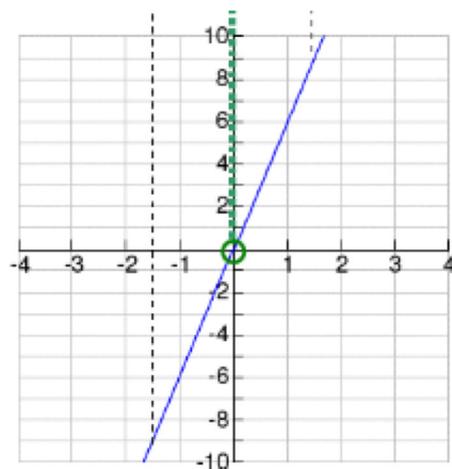
Bsp.:  $f(x) = x^3 - 7x - 6$



$f'(x) = 3x^2 - 7$



$f''(x) = 6x$



### Steigen/Fallen

Wenn die **erste Ableitung** der Funktion  $f$  bei  $x = x_0$  **positiv** ist, d.h.  $f'(x_0) > 0$ , dann **steigt** der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$ .

Wenn die **erste Ableitung** der Funktion  $f$  bei  $x = x_0$  **negativ** ist, d.h.  $f'(x_0) < 0$ , dann **fällt** der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$ .

### Krümmung

Wenn die **zweite Ableitung** der Funktion  $f$  bei  $x = x_0$  **positiv** ist, d.h.  $f''(x_0) > 0$ , dann ist der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$  **konvex** ("Links-Kurve").

Wenn die **zweite Ableitung** der Funktion  $f$  bei  $x = x_0$  **negativ** ist, d.h.  $f''(x_0) < 0$ , dann ist der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$  **konkav** ("Rechts-Kurve").

### Lokale Maxima/Minima

Die Funktion  $f$  hat bei  $x = x_0$  ein **lokales Maximum**, falls die Tangente an den Grafen von  $f$  bei  $x = x_0$  horizontal ist und falls der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$  konkav ist.

Dies trifft zu, falls  $f'(x_0) = 0$  (notwendig) und  $f''(x_0) < 0$  (hinreichend).

Die Funktion  $f$  hat bei  $x = x_0$  ein **lokales Minimum**, falls die Tangente an den Grafen von  $f$  bei  $x = x_0$  horizontal ist und falls der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$  konvex ist.

Dies trifft zu, falls  $f'(x_0) = 0$  (notwendig) und  $f''(x_0) > 0$  (hinreichend).

### Globales Maximum/Minimum

Das **globale Maximum/Minimum** einer stetigen Funktion ist entweder ein lokales Maximum/Minimum oder der Funktionswert von  $f$  an einem der Endpunkte des Definitionsbereichs.

### Wendepunkte

Die Funktion  $f$  hat bei  $x = x_0$  einen **Wendepunkt**, falls der Graf von  $f$  bei  $x = x_0$  seine Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.

Dies trifft zu, falls  $f''(x_0) = 0$  (notwendig) und  $f'''(x_0) \neq 0$  (hinreichend).

Bsp.:  $f(x) = x^3 - 7x - 6$  (siehe Seite 1)  $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 7$   
 $\Rightarrow f''(x) = 6x$   
 $\Rightarrow f'''(x) = 6$

### Lokale Maxima/Minima

$$f'(x) = 0 \text{ bei } x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}} = 1.52\dots \text{ und } x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}} = -1.52\dots$$

$$f''(x_1) = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = 9.16\dots > 0 \quad \Rightarrow \text{lokales Minimum bei } x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$f''(x_2) = -6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = -9.16\dots < 0 \quad \Rightarrow \text{lokales Maximum bei } x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Globales Maximum/Minimum

Bsp.:  $D = [0,4]$   $\Rightarrow$  globales Maximum bei  $x = 4$  (Endpunkt des Def.bereichs)

$\Rightarrow$  globales Minimum bei  $x = x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$  (lokales Minimum)

Bsp.:  $D = [-4,3]$   $\Rightarrow$  globales Maximum bei  $x = x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$  (lokales Maximum)

$\Rightarrow$  globales Minimum bei  $x = -4$  (Endpunkt des Def.bereichs)

Wendepunkte

$f''(x) = 0$  bei  $x_3 = 0$

$f'''(x_3) = 6 \neq 0$   $\Rightarrow$  Wendepunkt bei  $x_3 = 0$

Finanzmathematik

**Grenzkosten-/ertrags-/gewinnfunktion** = erste Ableitung der Kosten-/Ertrags-/Gewinnfunktion

Bsp.: Kostenfunktion  $K(x) = 120 + 2x^2$   
 $\Rightarrow$  Grenzkostenfunktion  $K'(x) = 4x$

Ertragsfunktion  $E(x) = 168x - x^2$   
 $\Rightarrow$  Grenzertragsfunktion  $E'(x) = 168 - 2x$

Gewinnfunktion  $G(x) = E(x) - K(x) = -120 + 168x - 3x^2$   
 $\Rightarrow$  Grenzgewinnfunktion  $G'(x) = 168 - 6x$

**Durchschnittskosten-/ertrags-/gewinnfunktion**

Durchschnittskostenfunktion  $\bar{K}(x) := \frac{K(x)}{x}$  mit  $K(x)$  = Kostenfunktion

Bsp.: Kostenfunktion  $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$   
 $\Rightarrow$  Durchschnittskostenfunktion  $\bar{K}(x) = 3x + 4 + \frac{2}{x}$

Durchschnittsertragsfunktion  $\bar{E}(x) := \frac{E(x)}{x}$  mit  $E(x)$  = Ertragsfunktion

Durchschnittsgewinnfunktion  $\bar{G}(x) := \frac{G(x)}{x}$  mit  $G(x)$  = Gewinnfunktion