Aufgaben 8 Schwingungen
Drehpendel, Gedämpfte Schwingung

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, welche Grössen und mit welcher Gesetzmässigkeit diese Grössen die Periodendauer einer Drehschwingung beeinflussen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

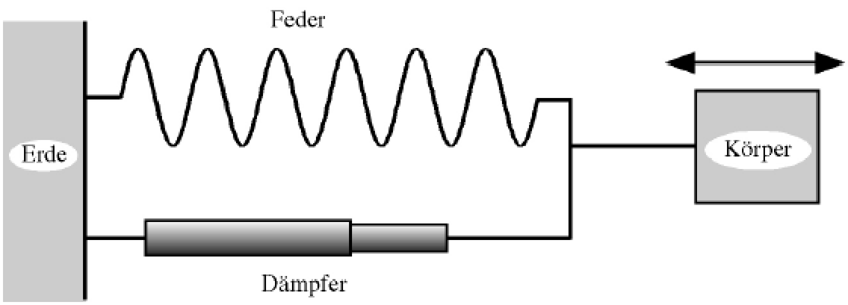
8.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 1.7 Drehschwingungen: Hin- und herfliessender Drehimpuls (Seite 10)
- 1.9 Die Dämpfung von Schwingungen (Seite 12)

Hinweis zum Abschnitt 1.7:
- Im zweiten Satz nach der Abb. 1.22 („Allerdings treten darin Grössen auf, die ...“) sind mit den „Grössen“ das Trägheitsmoment des Schwingkörpers und die Federkonstante (Direktionsmoment) der Feder gemeint.

8.2 Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Gedämpfte Schwingung - Drehpendel (1:29)

8.3 In dieser Aufgabe sollen Sie die Dynamik des gedämpften Federschwingers untersuchen.

Betrachten Sie also den folgenden gedämpften Federschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.29, Seite 12):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei x = 0 liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

a) Skizzieren Sie den Federschwinger, und zeichnen Sie die beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.

b) Formulieren Sie für den Schwingkörper das (aus der Mechanik bekannte Newton'sche) Aktionsprinzip in allgemeiner vektorieller Form.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

c) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des Aktionsprinzips.

Die drei Grössen in der in c) formulierten Gleichung hängen vom Ort x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers ab. x, v und a sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten des Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors.

d) Geben Sie an, wie die drei Grössen von x, v und a abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von c) ein.

Der zeitliche Verlauf der Auslenkung x lautet bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

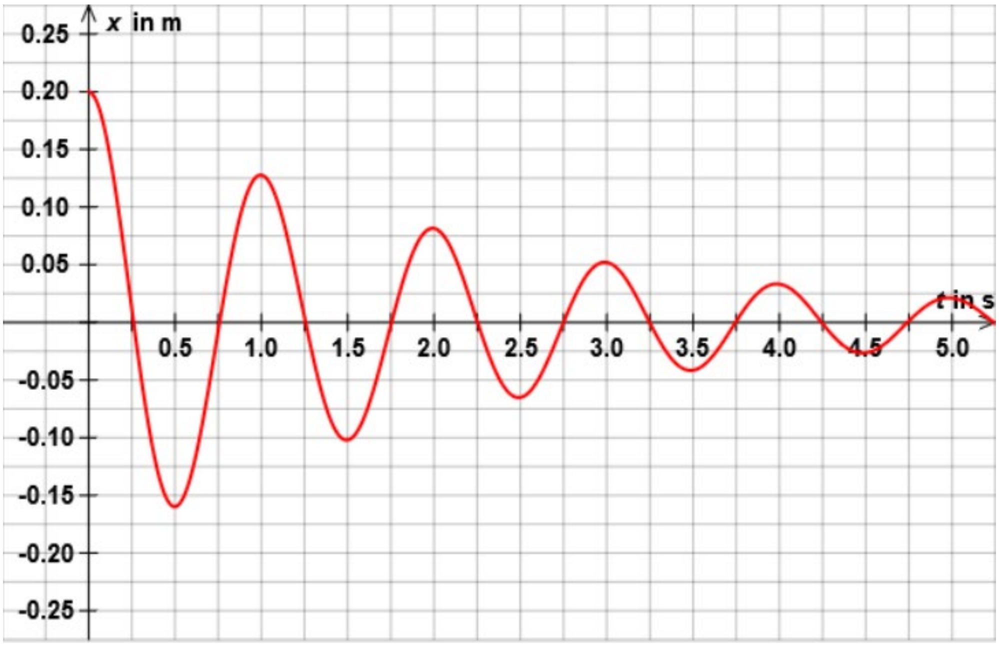
$$x = x(t) = \hat{x}\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ($\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung)

Für bestimmte Zahlenwerte der Grössen m, D, k, $\hat{x}$ und φ sieht der Graf von $x = x(t)$ für $t \geq 0$ s wie folgt aus:



e) Bestimmen Sie aus dem Grafen die konkreten Zahlenwerte für die Periode T_d und die Kreisfrequenz ω_d.

f) Markieren Sie direkt im Grafen die Zeitpunkte/Zeitintervalle, zu/in welchen ...

i) ... in der Feder keine Energie gespeichert ist.

ii) ... im Dämpfer keine Energie dissipiert wird.

iii) ... im Schwingkörper kein Impuls gespeichert ist.

iv) ... Impuls von der Feder in den Schwingkörper fliesst.

v) ... Impuls vom Schwingkörper in den Dämpfer fliesst.

vi) ... Impuls von der Feder in die Erde fliesst.

vii) ... Energie von der Feder in die Erde fliesst.

viii) ... Energie in den Dämpfer fliesst.

8.4 Bearbeiten Sie die Aufgabe 8.3 a) bis d) für den Fall ohne Dämpfung (k = 0 Ns/m).

Lösungen

8.1 ...

8.2 …

8.3 a) Die Richtungen der beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ hängen vom Ort $\vec{x}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Schwingkörpers ab.

Schwingung in x-Richtung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fälle:

- $x = 0$, $v > 0$ (Nulldurchgang nach rechts): $\vec{F}_F = \vec{0}$, $\vec{F}_D$ zeigt nach links
- $x > 0$, $v > 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D$ zeigt nach links
- $x > 0$, $v = 0$ (rechter Umkehrpunkt) $\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D = \vec{0}$
- $x > 0$, $v < 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts
- $x = 0$, $v < 0$ (Nulldurchgang nach links): $\vec{F}_F = \vec{0}$, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts
- $x < 0$, $v < 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts
- $x < 0$, $v = 0$ (linker Umkehrpunkt): $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D = \vec{0}$
- $x < 0$, $v > 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D$ zeigt nach links

b) $\vec{F}_F + \vec{F}_D = \dot{\vec{p}}$

c) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $F_F + F_D = \dot{p}$

d) $F_F = - D \cdot x$ $F_D = - k \cdot v$ $\dot{p} = m \cdot a$

$\Rightarrow$ $- D \cdot x - k \cdot v = m \cdot a$

e) Periode $T_d = 1.0$ s

Kreisfrequenz $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 6.3\ s^{-1}$

f) i) Zeitpunkte, zu welchen die Feder entspannt ist

$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x = 0$ m

$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen der Graf die Zeitachse schneidet

$\Rightarrow$ $t = 0.25$ s, 0.75 s, 1.25 s, ...

ii) Zeitpunkte, zu welchen der Schwingkörper in Ruhe ist

$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v = 0$ m/s

$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen der Graf ein lokales Maximum/Minimum annimmt

$\Rightarrow$ $t = 0.0$ s, 0.5 s, 1.0 s, ...

iii) gleiche Zeitpunkte wie in iii)

iv) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestaucht, d.h. weder entspannt noch gestreckt ist

$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x < 0$ m

$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf unterhalb der Zeitachse verläuft

$\Rightarrow$ $0.25\ s < t < 0.75\ s$, $1.25\ s < t < 1.75\ s$, $2.25\ s < t < 2.75\ s$, ...

v) Zeitintervalle, in welchen sich der Schwingkörper in die negative Richtung bewegt

$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v < 0$ m/s

$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf nach unten verläuft

$\Rightarrow$ $0.0\ s < t < 0.5\ s$, $1.0\ s < t < 1.5\ s$, $2.0\ s < t < 2.5\ s$, ...

vi) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestreckt, d.h. weder entspannt noch gestaucht ist

$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x > 0$ m

$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf oberhalb der Zeitachse verläuft

$\Rightarrow$ $0.0\ s < t < 0.25\ s$, $0.75\ s < t < 1.25\ s$, $1.75\ s < t < 2.25\ s$, ...

vii) nie

viii) Zeitintervalle, in welchen im Dämpfer Energie dissipiert wird
$\Rightarrow$ Zeitintervalle zwischen den in ii) bestimmten Zeitpunkten

8.4 a) Die Richtung der Kraft $\vec{F}_F$ hängt vom Ort $\vec{x}$ des Schwingkörpers ab.

Schwingung in x-Richtung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fälle:
- $x = 0$ (Nulldurchgänge): $\vec{F}_F = \vec{0}$
- $x > 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach links
- $x < 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts

b) $\vec{F}_F = \dot{\vec{p}}$

c) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow F_F = \dot{p}$

d) $F_F = - D \cdot x$ $\dot{p} = m \cdot a$
$\Rightarrow - D \cdot x = m \cdot a$