Mass und Messen

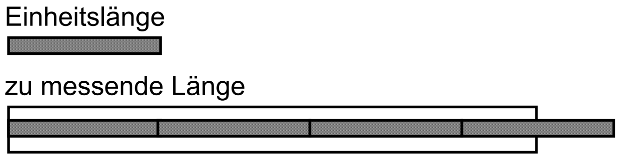
Am Anfang der Zivilisation stand die Messkunst. Unsere Vorfahren lernten die Messtechnik anzuwenden, als sie sesshaft wurden, Häuser bauten und Felder bestellten. Die ersten Masseinheiten waren Naturmasse wie Schritt, Elle, Zoll, Fuss usw. Im Laufe der Zeit wuchs die Zahl der verwendeten Einheiten zu einer unüberschaubaren Fülle an. Deshalb wurde im Jahre 1875 von 17 Staaten die Meterkonvention abgeschlossen, der heute 40 Staaten angehören. 1960 wurde von der 11. internationalen Konferenz für Mass und Gewicht das Internationale Einheitensystem (SI) angenommen, das heute in vielen Staaten verbindlich eingeführt ist. Das SI-Einheitensystem wurde an der 18. Konferenz im Jahre 2018 einer umfassenden Revision unterworfen, welche am 20. Mai 2019 in Kraft getreten ist.

Eine **physikalische Grösse** (z.B.: Länge, Masse, Zeit) beschreibt eine einzelne, genau definierte Eigenschaft einer Erscheinung qualitativ und quantitativ.

Masszahl, Masseinheit

Messen heisst, die zu messende Grösse mit einer festgelegten Masseinheit zu vergleichen.

Bsp.: Wenn die Länge eines Gegenstandes gemessen werden soll, dann heisst die Frage, wie oft eine Einheitslänge in der zu messenden Länge enthalten ist.



In der zu messenden Länge ist die Einheitslänge 3.5 Mal enthalten.

Ist die Einheitslänge 1 m (Meter), so ist die zu messende Länge also $3.5 \cdot 1\ \text{m} = 3.5\ \text{m}$

Grösse = Masszahl · Masseinheit

Bsp.: $3.5\ \text{m} = 3.5 \cdot 1\ \text{m}$
Die Grösse 3.5 m ist das Produkt aus der Masszahl 3.5 und der Masseinheit 1 m.

$62.8\ \text{kg} = 62.8 \cdot 1\ \text{kg}$

$0.34\ \text{s} = 0.34 \cdot 1\ \text{s}$

SI-Einheitensystem

Masseinheiten dienen zur Bestimmung des Wertes von physikalischen Grössen. Ein Einheitensystem ist ein Satz von Regeln, welcher angibt, wie die Masseinheit jeder in Naturwissenschaft und Technik verwendeten Grösse widerspruchsfrei festgelegt wird. Das heute weltweit angewandte Einheitensystem ist das Internationale Einheitensystem, auf Französisch "Système International d'Unités" (SI). Es wurde von der 11. Generalkonferenz für Mass und Gewicht (CGPM) im Jahre 1960 eingeführt. In der Folge löste das SI eine Reihe, vor allem in den Naturwissenschaften verwendete Einheitensysteme ab und machte fortan die zum Teil komplizierten Umrechnungen zwischen verschiedenen Systemen überflüssig.

Im Internationalen Einheitensystem unterscheidet man zwei Klassen von Einheiten, die **Basiseinheiten** und die **abgeleiteten Einheiten**.

Basiseinheiten

SI-Basisgrösse		SI-Basiseinheit	
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	I_Q	Ampère	A
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	l_v	Candela	cd

Die Definitionen der SI-Basiseinheiten können auf der Website des Bureau International des Poids et Mesures nachgeschlagen werden (in englischer oder französischer Sprache).

Bsp: (sinngemässe deutsche Übersetzung)

Der **Meter** (m) ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer 1/299'792'458 Sekunden durchläuft.

Die **Sekunde** (s) ist das 9'192'631'770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entprechenden Strahlung.

Beispiele abgeleiteter Einheiten

Abgeleitete Grösse		SI-Einheit		
Kraft	F	Newton	N	$= m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Druck	p	Pascal	Pa	$= m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energie	W	Joule	J	$= m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Leistung	P	Watt	W	$= m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Elektrische Ladung	Q	Coulomb	C	$= A \cdot s$
Elektrische Spannung	U	Volt	V	$= m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrischer Widerstand	R	Ohm	Ω	$= m^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$

Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

	Faktor		Vorsatz	Zeichen
Trillionenfach	1'000'000'000'000'000'000	$= 10^{18}$	Exa	E
Billiardenfach	1'000'000'000'000'000	$= 10^{15}$	Peta	P
Billionenfach	1'000'000'000'000	$= 10^{12}$	Tera	T
Milliardenfach	1'000'000'000	$= 10^{9}$	Giga	G
Millionenfach	1'000'000	$= 10^{6}$	Mega	M
Tausendfach	1'000	$= 10^{3}$	Kilo	k
Hundertfach	100	$= 10^{2}$	Hekto	h
Zehnfach	10	$= 10^{1}$	Deka	da
Zehntel	0.1	$= 10^{-1}$	Dezi	d
Hundertstel	0.01	$= 10^{-2}$	Zenti	c
Tausendstel	0.001	$= 10^{-3}$	Milli	m
Millionstel	0.000'001	$= 10^{-6}$	Mikro	µ
Milliardstel	0.000'000'001	$= 10^{-9}$	Nano	n
Billionstel	0.000'000'000'001	$= 10^{-12}$	Piko	p
Billiardstel	0.000'000'000'000'001	$= 10^{-15}$	Femto	f
Trillionstel	0.000'000'000'000'000'001	$= 10^{-18}$	Atto	a

Bsp.: 1 Zentimeter = 1 cm = 0.01 m = 10^{-2} m
1 Nanosekunde = 1 ns = 0.000'000'001 s = 10^{-9} s
1 Megawatt = 1 MW = 1'000'000 W = 10^{6} W
1 Kilojoule = 1 kJ = 1'000 J = 10^{3} J

Physikalische Grössen werden häufig in der **Zehnerpotenzdarstellung** angegeben.

Bsp.: 3'572 m = $3.572 \cdot 10^{3}$ m
426.48 kg = $4.264'8 \cdot 10^{2}$ kg
3'002 MW = $3.002 \cdot 10^{9}$ W
0.000'264 m = $2.64 \cdot 10^{-4}$ m

Messfehler

Es liegt in der Natur eines Messvorganges, dass dabei Fehler auftreten. Dabei ist zwischen den **systematischen** und den **zufälligen** Fehlern zu unterscheiden.

Systematische Fehler

Systematische Fehler liegen vor, wenn z.B. Messgeräte nicht richtig kalibriert sind. Sie können aber auch im Messverfahren begründet sein. So führt die Nichtberücksichtigung von Nebenumständen eventuell zu einem Fehler.

Zufällige oder statistische Fehler

Auch bei konsequenter Vermeidung von systematischen Fehlern wird die mehrmalige Messung einer Grösse nicht immer dasselbe Resultat liefern, selbst bei grösster Sorgfalt beim Messen. Der zufällige oder statistische Fehler kann mit Ereignissen aus der mathematischen Statistik verglichen werden. Die Theorie sagt, dass der statistische Messfehler normalverteilt ist.

Fehler einer Einzelgrösse

Alle physikalischen Grössen sind entweder direkt gemessene Grössen oder hängen von gemessenen Grössen ab. Daher sind Zahlenangaben von physikalischen Grössen grundsätzlich mit Fehlern behaftet.

Die Genauigkeit einer Grösse kann durch die Angabe des **absoluten Fehlers** ausgedrückt werden.

Bsp.: $s = (2.1 \pm 0.3)$ m
$v = (4.13 \pm 0.02)$ m/s
$U = (15 \pm 1)$ V
$\vartheta = (23.3 \pm 0.1)$ °C

Auch wenn der absolute Fehler nicht ausdrücklich angegeben wird, ist die entsprechende Grösse als ungenau zu betrachten. Die Genauigkeit der Grösse drückt sich dann durch die Anzahl **signifikanter Stellen** aus.

Signifikante Stellen sind alle Stellen (Vor- und Nachkommastellen) eines Zahlenwertes ausser sogenannte führende Nullen.

Bsp.: Die Messwerte 248 cm, 2.48 m und 0.00248 km sind alle gleich genau. Sie haben zwar eine unterschiedliche Anzahl Dezimalstellen (0, 2 und 5), jedoch eine gemeinsame Anzahl signifikanter Stellen (3).

Bsp.:

Zahlenwert	Anzahl signifikanter Stellen
3.141'5	5
27.1	3
27.13	4
27.130	5
27.000	5
27.0	3
27	2
200	3
200.0	4
200.00	5
200.01	5
0.06	1
0.063'1	3
0.060	2
0.060'0	3
$7 \cdot 10^2$	1
$7.0 \cdot 10^2$	2
$4.30 \cdot 10^{-6}$	3
$4.300 \cdot 10^{-6}$	4
$4.300'12 \cdot 10^{-6}$	6
0	1
0.0	1

Der absolute Fehler einer Grösse ohne Fehlerangabe ist eine Einheit der letzten signifikanten Stelle.

Bsp.:

$s = 2.1$ cm	bedeutet	$s = (2.1 \pm 0.1)$ cm
$s = 2.10$ cm	bedeutet	$s = (2.10 \pm 0.01)$ cm
$v = 2.998 \cdot 10^8$ m/s	bedeutet	$v = (2.998 \pm 0.001) \cdot 10^8$ m/s
$v = 3.0 \cdot 10^8$ m/s	bedeutet	$v = (3.0 \pm 0.1) \cdot 10^8$ m/s
$m = 50$ kg	bedeutet	$m = (50 \pm 1)$ kg
$P = 5$ kW	bedeutet	$P = (5 \pm 1)$ kW
$P = 5'000$ W	bedeutet	$P = (5'000 \pm 1)$ W
$t = 5.00$ s	bedeutet	$t = (5.00 \pm 0.01)$ s

Messserien

Bei einer Messserie wird die gleiche physikalische Grösse mehrmals gemessen.

Mittelwert

Der Mittelwert ist das arithmetische Mittel aller gemessenen Einzelwerte:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Standardabweichung

Die Standardabweichung charakterisiert die Streuung der einzelnen Messwerte um den Mittelwert. Sie ist wie folgt definiert:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

Die Standardabweichung ist ein Mass für die Zuverlässigkeit und Genauigkeit einer Einzelmessung. Sie gibt ein Intervall $[\overline{x} - \Delta x \, , \, \overline{x} + \Delta x]$ um den Mittelwert an, in dem gemäss Theorie etwa zwei Drittel der Messwerte liegen.

Das Ergebnis wird immer in der Form $\overline{x} \pm \Delta x$ angegeben.

Relativer Fehler

Der relative Fehler wird durch den Quotienten aus Standardabweichung und Mittelwert gebildet:

$$\text{Relativer Fehler} = \frac{\Delta x}{\overline{x}}$$

Bsp.: Die Umlaufzeit T eines langsam rotierenden Rades wird mehrmals gemessen:

$T_1 = 23.4$ s $\quad T_2 = 24.1$ s $\quad T_3 = 22.7$ s $\quad T_4 = 22.4$ s $\quad T_5 = 23.7$ s

Mittelwert $\overline{T} = 23.26$ s (ungerundet)
Standardabweichung $\Delta T = 0.702...$ s (ungerundet)

$T = (23.3 \pm 0.7)$ s

Relativer Fehler $\frac{\Delta T}{\overline{T}} = 0.030 = 3.0\%$

Fehlerfortpflanzung

Meist wird aus gemessenen Grössen durch Einsetzen in eine Formel eine andere physikalische Grösse berechnet. Dabei ist zu beachten, dass sich die Messfehler der beteiligten Grössen auf die Zielgrösse übertragen. Das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz beschreibt die Fehlerübertragung entsprechend.

Eine Fehlerabschätzung ohne Differentialrechnung kann folgendermassen gemacht werden
(Annahme: Aus den gemessenen Grössen x und y wird die Zielgrösse z berechnet):

Summe und Differenz

$z = x + y$ oder $z = x - y$ absoluter Grösstfehler $|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|$

Faustregel:
Bei der Zielgrösse ist die kleinste der in den gemessenen Grössen vorkommenden Anzahl Dezimalen (= Anzahl Stellen hinter dem Komma) anzugeben.

Bsp.: $x = (2.4 \pm 0.3)$ s
$y = (1.3 \pm 0.1)$ s
$z = x + y = (3.7 \pm 0.4)$ s
Beide Summanden haben 1 Dezimale. Daher ist die Summe mit 1 Dezimale anzugeben.

$x = 12$ s
$y = 1.3$ s
$z = x - y = 11$ s
Der Minuend hat 0 Dezimalen und der Subtrahend 1. Daher ist die Differenz mit 0 Dezimalen anzugeben.

Produkt oder Quotient

$z = x \cdot y$ oder $z = \frac{x}{y}$ relativer Grösstfehler $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

Faustregel:
Bei der Zielgrösse ist die kleinste der in den gemessenen Grössen vorkommenden Anzahl signifikanter Stellen anzugeben.

Bsp.: $x = 7.40$ m/s
$y = 3.142$ s
$z = x \cdot y = 23.3$ m
(Rechner: $7.4 \cdot 3.142 = 23.250'8$)
Der erste Faktor enthält 3 signifikante Stellen und der zweite 4. Daher ist das Produkt mit 3 signifikanten Stellen anzugeben.

$x = 23.3$ m
$y = 3.1$ s
$z = \frac{x}{y} = 7.5$ m/s
(Rechner: $23.3 : 3.1 = 7.516'1...$)
Der Dividend enthält 3 signifikante Stellen und der Divisor 2. Daher ist der Quotient mit 2 signifikanten Stellen anzugeben.