

## Aufgaben 8                      Wellen Überlagerung, Interferenz, Stehende Wellen, Eigenschwingungen

### Lernziele

- das Prinzip der ungestörten Überlagerung von Wellen kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was konstruktive und destruktive Interferenz ist.
- die Überlagerung zweier in gleiche Richtung bzw. gegeneinander laufender Wellen beschreiben können und verstehen.
- wissen und verstehen, was ein Gangunterschied ist.
- die Interferenz zweier schräg zueinander laufender gleicher Sinuswellen verstehen.
- wissen, wie die Energie im Überkreuzungsbereich zweier Sinuswellen fliesst.
- wissen, wie eine Welle an einem festen und freien Ende eines Wellenträgers reflektiert wird.
- verstehen, wie eine stehende Welle entsteht.
- ausgewählte einfachere Problemstellungen zur Interferenz bearbeiten können.
- eine stehende Welle auf einem eindimensionalen Wellenträger als Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen verstehen.
- verstehen, dass sich auf einem endlichen Wellenträger nur bei bestimmten Frequenzen eine stehende Welle bzw. eine Eigenschwingung bildet.
- den Zusammenhang zwischen der Länge eines eindimensionalen Wellenträgers und den Wellenlängen bzw. Frequenzen der möglichen Eigenschwingungen verstehen und anwenden können.
- die mathematische Beschreibung einer stehenden Welle bzw. Eigenschwingung kennen, verstehen und anwenden können.
- Beispiele von stehenden Wellen kennen.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

### Aufgaben

#### 8.1 Vorgängiges Selbststudium

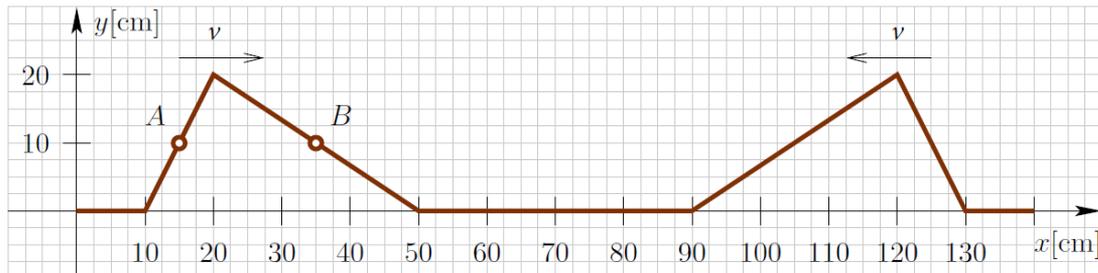
- Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
  - 4.9 Zwei Wellen am selben Ort (Seiten 45 und 46, ohne Aufgabe 2)
  - 4.10 Zwei Sinuswellen – Interferenz (Seiten 46 bis 48, ohne Erklärungen zur Formel  $y = \dots$ , ohne Aufgaben)
  - 4.11 Reflexion von Wellen (Seite 48, nur erster Abschnitt, d.h. bis „... Weg etwas verloren.“)
  - 4.12 Eigenschwingungen von Wellenträgern (Seiten 48 und 49, nur bis Tabelle 4.1, ohne Aufgaben)
  - 4.13 Die Interferenz von Wellen (Seiten 51 und 52, nur bis Abb. 4.38, ohne Aufgaben)
- Studieren Sie das folgende **Applet**:
  - [Überlagerung \(Interferenz\) zweier Störungen](#)
- Studieren Sie die folgenden **YouTube-Videos**:
  - [Überlagerung von konzentrischen Kreiswellen auf Wasser](#) (0:33)
  - [Interferenz zweier Lautsprecher](#) (1:08)
- Studieren Sie das folgende **Applet**:
  - [Stehende Welle \(Erklärung durch Überlagerung mit der reflektierten Welle\)](#)

Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgabenstellungen:

- Beobachten Sie, wie die von links einfallende Welle am festen bzw. freien Ende reflektiert wird. Beurteilen Sie den Unterschied zwischen der Reflexion an einem festen und der Reflexion an einem losen Ende.
- Beobachten und Sie die Entstehung einer stehenden Welle bei der Reflexion einer Welle an einem festen bzw. freien Ende des Wellenträgers.
- (siehe nächste Seite)

- iii) Beurteilen Sie, ob die stehende Welle am Ende des Wellenträgers einen Schwingungsknoten oder einen Schwingungsbauch aufweist.
- e) Führen Sie in Moodle den [Test 8.1](#) durch.

8.2 Auf einem Seil nähern sich zwei Pulse mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten  $v = 40 \text{ cm/s}$ . Die Situation zum Zeitpunkt  $t_0 = 0 \text{ s}$  ist in der folgenden Skizze dargestellt:



Skizzieren Sie die Situation zum Zeitpunkt  $t_2 = 750 \text{ ms}$ .

8.3 Betrachten Sie die Überlagerung zweier Sinus-Wellen, welche durch die beiden Funktionen  $y_1$  und  $y_2$  mit den folgenden Funktionsgleichungen beschrieben werden:

$$y_1(x,t) = \hat{y} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad \text{mit } \hat{y} = 0.30 \text{ m, } k = 2.0 \text{ m}^{-1}, \omega = 1.0 \text{ s}^{-1}$$

$$y_2(x,t) = \hat{y} \cdot \sin(kx + \omega t) \quad \text{mit } \hat{y} = 0.30 \text{ m, } k = 2.0 \text{ m}^{-1}, \omega = 1.0 \text{ s}^{-1}$$

- a) Bestimmen Sie die Wellenlänge, die Frequenz und die Periodendauer der beiden Wellen.
- b) Begründen Sie schlüssig, dass die erste Welle in die positive und die zweite Welle in die negative  $x$ -Richtung läuft.

Hinweise:

- Betrachten Sie jede Einzelwelle zu zwei nahe beieinanderliegenden Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ).
- Überlegen Sie sich, ob sich für einen Punkt konstanter Phase, z.B. für einen Wellenberg, die  $x$ -Koordinate in der Zeitspanne von  $t_1$  bis  $t_2$  vergrößert oder verkleinert.
- Die Phase ist das Argument der Sinusfunktion, d.h.  $kx - \omega t$  bzw.  $kx + \omega t$ .

- c) Bilden Sie die Überlagerung der beiden Wellen:

$$y(x,t) := y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Interpretieren Sie das Ergebnis: Begründen Sie, dass es sich bei dieser Überlagerung um eine stehende Welle handelt.

Hinweis:

- Verwenden Sie die folgende trigonometrische Identität:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) \equiv 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

8.4 Die Wellenlängen bzw. die Frequenzen der Eigenschwingungen auf einem Wellenträger der Länge  $l$  seien wie folgt bezeichnet:

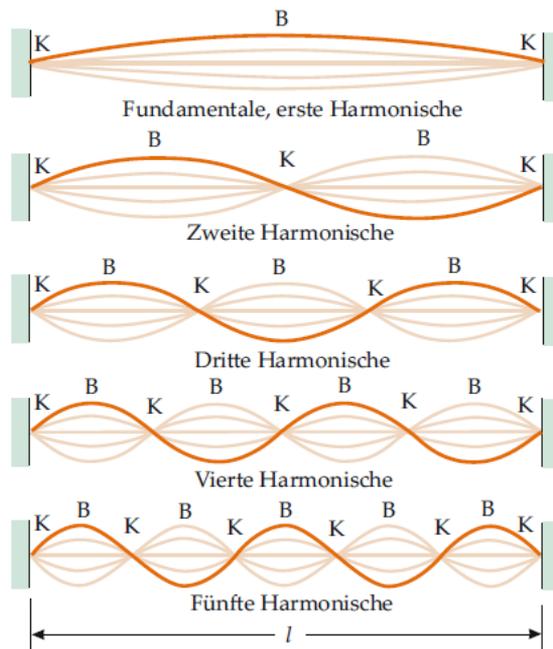
	Wellenlänge	Frequenz
Grundschiwingung	$\lambda_0$	$f_0$
1. Oberschiwingung	$\lambda_1$	$f_1$
2. Oberschiwingung	$\lambda_2$	$f_2$
3. Oberschiwingung	$\lambda_3$	$f_3$
...		
m. Oberschiwingung	$\lambda_m$	$f_m$

Leiten Sie für die weiter unten genannten drei Fälle a), b) und c) mit Hilfe der entsprechenden Abbildungen eine Beziehung zwischen der Frequenz  $f_m$  der  $m$ -ten Oberschwingung und der Frequenz  $f_0$  der Grundschwingung her.

Vorgehen:

- i) Drücken Sie mit Hilfe der Abbildung für die Grundschwingung die Grundwellenlänge  $\lambda_0$  durch die Länge  $l$  des Wellenträgers aus.  
 Hinweis:  
 - Lesen Sie aus der Abbildung heraus, welcher Teil der Grundwellenlänge  $\lambda_0$  auf der ganzen Länge  $l$  des Wellenträgers Platz hat.
- ii) Drücken Sie mit Hilfe der Abbildungen für die Oberschwingungen die Wellenlänge  $\lambda_m$  der  $m$ -ten Oberschwingung durch die ganze Zahl  $m$  und die Länge  $l$  des Wellenträgers aus.  
 Hinweise:  
 - Lesen Sie aus den Abbildungen heraus, welcher Teil bzw. welches Vielfache der Wellenlänge  $\lambda_m$  auf der ganzen Länge  $l$  des Wellenträgers Platz hat.  
 - Bearbeiten Sie die Aufgabe zuerst für die konkreten Zahlenwerte  $m = 1, 2, 3, \dots$ , bevor Sie den gesuchten Zusammenhang zwischen  $\lambda_m$  und  $l$  allgemein für die ganze Zahl  $m$  formulieren.
- iii) Drücken Sie die Grundfrequenz  $f_0$  durch die Grundwellenlänge  $\lambda_0$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  aus.
- iv) Drücken Sie die Frequenz  $f_m$  der  $m$ -ten Oberschwingung durch die Wellenlänge  $\lambda_m$  der  $m$ -ten Oberschwingung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  aus.
- v) Drücken Sie durch Kombination der Ergebnisse aus i) bis iv) die Frequenz  $f_m$  der  $m$ -ten Oberschwingung durch die ganze Zahl  $m$  und die Grundfrequenz  $f_0$  aus.
- vi) Drücken Sie das Ergebnis aus v) in Worten aus.  
 Welche Frequenzen treten in den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) im Vergleich zur Grundfrequenz auf?

a) Der Wellenträger hat zwei feste Enden.



Hinweise:

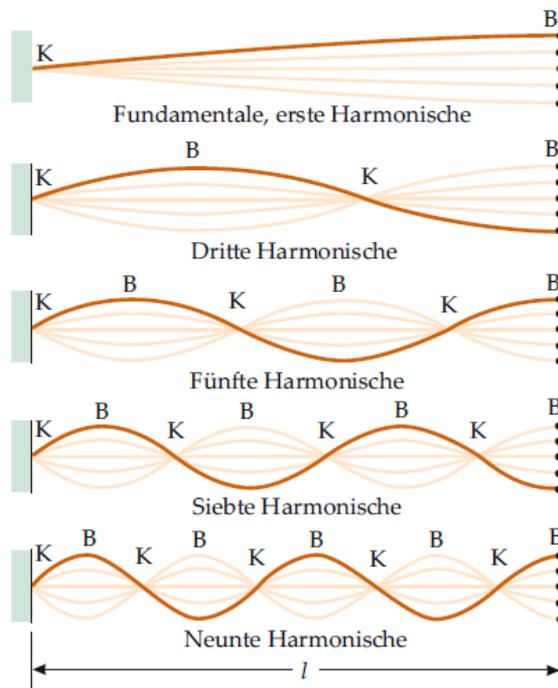
- Die „Fundamentale“ bzw. „Erste Harmonische“ ist die Grundschwingung.
- Die „Zweite Harmonische“ ist die erste Oberschwingung.
- Die „Dritte Harmonische“ ist die zweite Oberschwingung.
- usw.

- b) Der Wellenträger hat zwei freie Enden.

Hinweise:

- An den beiden freien Enden befinden sich Bäuche (B), und nicht Knoten (K) wie in a).
- Knoten und Bäuche sind im Vergleich zu a) vertauscht, d.h. wo sich in a) Knoten befinden, befinden sich in b) Bäuche, und wo sich in a) Bäuche befinden, befinden sich in b) Knoten.

- c) Der Wellenträger hat ein festes und ein freies Ende.



- Die „Fundamentale“ bzw. „Erste Harmonische“ ist die Grundschiwingung.
- Die „Dritte Harmonische“ ist die erste Oberschiwingung.
- Die „Fünfte Harmonische“ ist die zweite Oberschiwingung.
- usw.

(Quelle: Tipler/Mosca, Physik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik, Berlin 2019, Springer Spektrum, 8. Auflage, Seiten 508 und 513)

- 8.5 Ein 4.00 m langes Seil ist an einem Ende eingespannt, und das andere Ende ist an einer langen, leichten Schnur befestigt, so dass es sich frei bewegen kann (freies Ende). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen auf dem Seil beträgt 20.0 m/s.

Bestimmen Sie die Frequenz ...

- a) ... der Grundschiwingung.
- b) ... der zweiten Oberschiwingung.
- c) ... der dritten Oberschiwingung.

- 8.6 Von einer beidseitig offenen Orgelpfeife kennt man die Frequenzen von drei aufeinanderfolgenden Obertönen:

465.6 Hz      582.0 Hz      698.4 Hz

- a) Bestimmen Sie die Grundfrequenz.

Hinweis:

- Überlegen Sie sich, wie die Differenz der Frequenzen aufeinanderfolgender Obertöne mit der Grundfrequenz zusammenhängen.

- b) Geben Sie an, den wievielten Obertönen die angegebenen Frequenzen entsprechen.
- c) Bestimmen Sie die Länge der Orgelpfeife.

Hinweis:

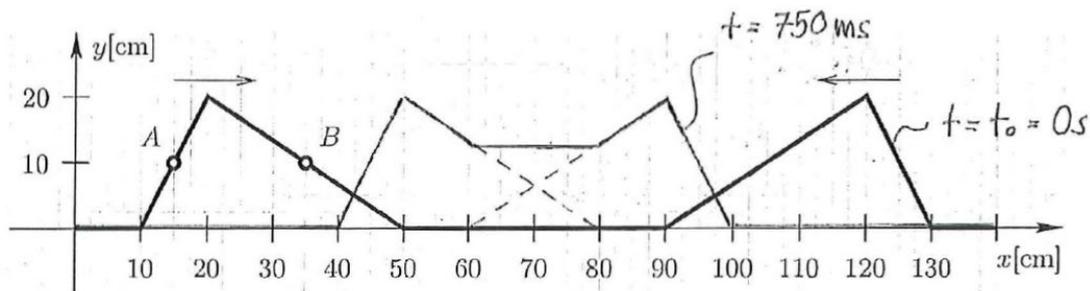
- Die Schallgeschwindigkeit in Luft (bei  $p = 1013 \text{ hPa}$  und  $\vartheta = 20 \text{ °C}$ ) beträgt  $343 \text{ m/s}$ .

8.7 Führen Sie in Moodle den [Test 8.2](#) durch.

**Lösungen**

- 8.1 a) -  
 b) -  
 c) -  
 d) i) Bei der Reflexion am festen Ende gibt es einen Phasensprung von einer halben Wellenlänge: Die Welle wird gespiegelt, d.h. aus einer Auslenkung nach oben wird eine Auslenkung nach unten und umgekehrt.  
 Bei der Reflexion am losen Ende gibt es keinen Phasensprung: Die Welle wird nicht gespiegelt, d.h. sie läuft so zurück, wie sie ohne Reflexion weiterlaufen würde.  
 ii) -  
 iii) festes Ende: Schwingungsknoten  
 freies Ende: Schwingungsbauch  
 e) -

8.2



- 8.3 a)  $\lambda = \pi \text{ m}$ ,  $f = \frac{1}{2\pi} \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 2\pi \text{ s}$   
 b) Erste Welle: Wenn  $t$  grösser wird, bleibt die Phase  $kx - \omega t$  konstant, wenn auch  $x$  **grösser** wird. Ein Punkt gleicher Phase, z.B. ein Wellenberg, bewegt sich also in die positive  $x$ -Richtung. Die ganze Welle läuft daher in die **positive**  $x$ -Richtung.  
 Zweite Welle: Wenn  $t$  grösser wird, bleibt die Phase  $kx + \omega t$  konstant, wenn  $x$  **kleiner** wird. Ein Punkt gleicher Phase, z.B. ein Wellenberg, bewegt sich also in die negative  $x$ -Richtung. Die ganze Welle läuft daher in die **negative**  $x$ -Richtung.  
 c)  $y(x,t) = 2 \hat{y} \sin(kx) \cos(\omega t)$   
 Die Variablen  $x$  und  $t$  sind voneinander „getrennt“: Die Variable  $x$  steht nur im Argument der Sinus-Funktion, die Variable  $t$  nur im Argument der Cosinus-Funktion.
- 8.4 a) i)  $\lambda_0 = 2l$   
 ii)  $\lambda_m = \frac{2}{m+1} l$   
 iii)  $f_0 = \frac{v}{\lambda_0}$   
 iv)  $f_m = \frac{v}{\lambda_m}$   
 v)  $f_m = (m + 1) f_0$   
 vi) (siehe nächste Seite)

- vi) Grundschiwingung:  $f_0$   
 1. Oberschiwingung ( $m = 1$ ):  $f_1 = 2 \cdot f_0$   
 2. Oberschiwingung ( $m = 2$ ):  $f_2 = 3 \cdot f_0$   
 3. Oberschiwingung ( $m = 3$ ):  $f_3 = 4 \cdot f_0$   
 usw.

In den Eigenschiwingungen (Grundschiwingung und Oberschiwingungen) treten als Frequenzen alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz  $f_0$  auf:  
 $f_0, 2 \cdot f_0, 3 \cdot f_0, 4 \cdot f_0, \dots$

b) gleich wie bei a)

c) i)  $\lambda_0 = 4l$   
 ii)  $\lambda_m = \frac{4}{2m+1} l$

iii)  $f_0 = \frac{v}{\lambda_0}$

iv)  $f_m = \frac{v}{\lambda_m}$

v)  $f_m = (2m + 1) f_0$

- vi) Grundschiwingung:  $f_0$   
 1. Oberschiwingung ( $m = 1$ ):  $f_1 = 3 \cdot f_0$   
 2. Oberschiwingung ( $m = 2$ ):  $f_2 = 5 \cdot f_0$   
 3. Oberschiwingung ( $m = 3$ ):  $f_3 = 7 \cdot f_0$   
 usw.

In den Eigenschiwingungen (Grundschiwingung und Oberschiwingungen) treten als Frequenzen nur die ungeraden ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz  $f_0$  auf:  
 $f_0, 3 \cdot f_0, 5 \cdot f_0, 7 \cdot f_0, \dots$

8.5 a)  $l = \frac{\lambda_0}{4}$   
 $v = \lambda_0 \cdot f_0$   
 -----  
 $\Rightarrow f_0 = \frac{v}{4l} = 1.25 \text{ Hz}$

b)  $f_2 = 5 \cdot f_0 = 6.25 \text{ Hz}$

c)  $f_3 = 7 \cdot f_0 = 8.75 \text{ Hz}$

8.6 a) 2 freie Enden:  $\Delta f$  (= Differenz der Frequenzen aufeinanderfolgender Oberschiwingungen) =  $f_0$   
 Gegebene Frequenzen:  $\Delta f = 582.0 \text{ Hz} - 465.6 \text{ Hz} = 698.4 \text{ Hz} - 582.0 \text{ Hz} = 116.4 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f_0 = 116.4 \text{ Hz}$

- b)  $465.6 \text{ Hz} = 4 \cdot 116.4 \text{ Hz} = 4 \cdot f_0 \hat{=} 3. \text{ OS}$   
 $582.0 \text{ Hz} = 5 \cdot 116.4 \text{ Hz} = 5 \cdot f_0 \hat{=} 4. \text{ OS}$   
 $698.4 \text{ Hz} = 6 \cdot 116.4 \text{ Hz} = 6 \cdot f_0 \hat{=} 5. \text{ OS}$

c)  $l = \frac{\lambda_0}{2}$   
 $v = \lambda_0 \cdot f_0$   
 -----  
 $\Rightarrow l = \frac{v}{2 \cdot f_0} = 1.47 \text{ m}$

8.7 -