

Aufgaben 2

Translations-Mechanik Impuls, Kraft, Impulsbilanz, Grundgesetz der Mechanik

Lernziele

- die Eigenschaften des Impulses und den Zusammenhang zwischen Impuls, Masse und Geschwindigkeit eines Körpers bei der Bearbeitung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- den Zusammenhang zwischen der Impulsstromstärke und dem geflossenen Impuls anwenden können.
- Impulsströme in konkreten Situationen korrekt einzeichnen können.
- die Regeln für die Richtungen von Impulsströmen und Kräften anwenden können.
- in konkreten Situationen Wechselwirkungskräfte, d.h. Actio-Reactio-Kräftepaare erkennen können.
- das Impulsbilanzgesetz bzw. das Grundgesetz der Mechanik anwenden können.
- den Zusammenhang zwischen der Impulsänderungsrate und der Impulsänderung anwenden können.
- die an einem Körper angreifenden Kräfte erkennen und korrekt einzeichnen können.
- das Grundgesetz der Mechanik bei der Bearbeitung von zwei- und dreidimensionalen Problemen anwenden können.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- die Vollständigkeit eines Gleichungssystems beurteilen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

- 2.1 Ein Güterwagen der Masse 80 t prallt mit einer Geschwindigkeit von 9.0 km/h gegen einen Prellbock. Nach dem Aufprall fährt er mit 5.4 km/h zurück.
- Bestimmen Sie den im Güterwagen gespeicherten Impuls vor und nach dem Aufprall.
 - Bestimmen Sie, wieviel Impuls während des Aufpralls aus dem Güterwagen über den Prellbock abgeflossen ist.
- 2.2 Zwei Eisenbahnwagen bewegen sich aufeinander zu und koppeln zusammen. Die Masse des ersten Eisenbahnwagens sei doppelt so gross wie die Masse des zweiten Wagens. Auch die Geschwindigkeit des ersten Wagens sei (betragsmässig) doppelt so gross wie jene des zweiten. Bestimmen Sie die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Wagen nach dem Stoss. Drücken Sie die gesuchte Geschwindigkeit durch die Geschwindigkeiten der beiden Wagen vor dem Stoss aus.
- 2.3 Von einem Rollwagen der Masse 20 kg, der sich mit der Geschwindigkeit 2.0 m/s bewegt, springt ein Junge der Masse 60 kg so ab, dass er sich beim Auftreffen auf dem Boden ...
- ... mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt wie der Wagen vor dem Absprung.
 - ... in Ruhe befindet.
 - ... mit der doppelten Geschwindigkeit bewegt wie der Wagen vor dem Absprung.
- Bestimmen Sie für alle drei Fälle a) bis c) die Geschwindigkeit des Wagens nach dem Absprung des Jungen.
- 2.4 Ein Fussballspieler beschleunigt einen ruhenden Ball der Masse 500 g auf eine Geschwindigkeit von 10 m/s. Der Fuss berührt den Ball während 0.10 s. Während dieser Zeitspanne fliesst Impuls zwischen dem Fuss und dem Ball. Bestimmen Sie die mittlere Impulsstromstärke.

- 2.5 Betrachten Sie noch einmal den in der Aufgabe 2.1 geschilderten Aufprall eines Güterwagens auf einen Prellbock.
- Skizzieren Sie den Güterwagen und den Prellbock während des Aufpralls. Zeichnen Sie den durch den Aufprall verursachten **Impulsstrom** zwischen dem Güterwagen und dem Prellbock ein.
 - Skizzieren Sie nochmals den Güterwagen und den Prellbock während des Aufpralls. Zeichnen Sie die zum Impulsstrom gehörenden **Kräfte** ein, die am Güterwagen und am Prellbock angreifen.
- 2.6 Ein Güterzug mit einer Lokomotive und zwei Wagen fährt auf einer geraden und horizontalen Strecke mit konstanter Geschwindigkeit.
- Erstellen Sie eine Skizze des Güterzuges. Zeichnen Sie alle für die horizontale Bewegung bedeutsamen **Impulsströme** ein, die die drei Fahrzeuge (Lokomotive, erster Wagen, zweiter Wagen) betreffen, d.h. wo Impuls in ein Fahrzeug hinein oder aus ihm herausfließt.
Hinweise:
 - Wählen Sie die Fahrtrichtung des Güterzuges als positive Richtung.
 - Berücksichtigen Sie auch die Rollreibung und den Luftwiderstand.
 - Erstellen Sie eine zweite Skizze des Güterzuges. Zeichnen Sie die zu den Impulsströmen gehörenden **Kräfte** ein, die ...
 - ... an der Lokomotive angreifen.
 - ... am ersten Wagen angreifen.
 - ... am zweiten Wagen angreifen.
 - Geben Sie an, welche Kräfte ein Actio-Reactio-Paar bilden. Geben Sie zudem für jedes Actio-Reactio-Paar an, zu welchem Impulsstrom es gehört.
- 2.7 Die Summe aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, sei gleich Null. Was lässt sich über den Bewegungszustand des Körpers aussagen?
- 2.8 Ein Körper der Masse 2.0 kg ruht auf einer ebenen, horizontalen Unterlage. Nun wird horizontal am Körper gezogen. Sobald die Haftreibung überwunden ist, beginnt sich der Körper zu bewegen. Ab diesem (Anfangs-)Zeitpunkt $t_0 = 0$ s beträgt die Zugkraft 5.0 s lang 24 N. Zusätzlich zur Zugkraft greift am Körper noch eine konstante Gleitreibungskraft von 16 N an. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Wenn die Zugkraft nach den 5 Sekunden nicht mehr wirkt, kommt der Körper wegen der Gleitreibung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_x wieder zum Stillstand.
- Skizzieren Sie den Körper. Zeichnen Sie alle für die horizontale Bewegung bedeutsamen Impulsströme ein, die den Körper betreffen, d.h. wo Impuls in den Körper hinein oder aus ihm herausfließt.
 - Skizzieren Sie den Körper nochmals. Zeichnen Sie die zu den Impulsströmen gehörenden Kräfte ein, die am Körper angreifen.
 - Formulieren Sie die Impulsbilanz für die beiden Zeitintervalle $0 \leq t \leq 5$ s und $5 \leq t \leq t_x$, und bestimmen Sie daraus die Impulsänderungsraten für die beiden Zeitintervalle.
 - Bestimmen Sie ...
 - ... die Änderung des im Körper gespeicherten Impulses in der Zeitspanne $0 \leq t \leq 5$ s.
 - ... die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t_1 = 5$ s.
 - ... die Änderung des im Körper gespeicherten Impulses in der Zeitspanne $5 \leq t \leq t_x$.
 - ... den Zeitpunkt t_x , zu welchem der Körper zum Stillstand kommt.

2.9 Betrachten Sie noch einmal die Aufgabe 2.6.

- a) Formulieren Sie die Impulsbilanz für alle drei Fahrzeuge.
- b) Die Masse der Lokomotive sei 60 t, die Masse des ersten Wagens 16 t und die Masse des zweiten Wagens 20 t. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei die Kupplung zwischen der Lokomotive und dem ersten Wagen mit 25 kN, jene zwischen dem ersten und dem zweiten Wagen mit 14 kN belastet, und die Beschleunigung des Zuges betrage gerade 0.50 m/s^2 .

Wieviel Impuls verliert der erste Wagen zum betrachteten Zeitpunkt pro Sekunde wegen Reibung (Rollreibung und Luftwiderstand zusammen)?

Bestimmen Sie die Summe der entsprechenden Impulsstromstärken.

Hinweis:

- Betrachten Sie die Impulsbilanz für den ersten Wagen.

2.10 Betrachten Sie den Sprung eines Fallschirmspringers für die erste Phase, in welcher der Fallschirm noch ungeöffnet bleibt.

- a) Skizzieren Sie den Fallschirmspringer. Zeichnen Sie alle Impulsströme ein, die den Fallschirmspringer betreffen.
- b) Skizzieren Sie den Fallschirmspringer nochmals. Zeichnen Sie die zu den Impulsströmen gehörenden Kräfte ein, die am Fallschirmspringer angreifen.
- c) Stellen Sie für den Fallschirmspringer die Impulsbilanz auf.
- d) Schreiben Sie die Impulsbilanz um, und lösen Sie die Gleichung nach der Beschleunigung $\dot{v}$ auf.

Hinweise:

Ersetzen Sie in der in a) aufgestellten Impulsbilanz ...

- i) ... die Impulsänderungsrate $\dot{p}$ durch die Masse m und die Beschleunigung $\dot{v}$.
- ii) ... die auftretenden Impulsstromstärken durch die Grössen, von denen die Impulsstromstärken abhängen.

Hinweis:

- Die Stromstärke I_{pL} des durch den Luftwiderstand abfliessenden Impulses ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v des Körpers: $I_{pL} \sim v^2$ bzw. $I_{pL} = k \cdot v^2$

- e) Skizzieren Sie mit schlüssiger Begründung den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v des Fallschirmspringers.

2.11 Ein Holzklotz rutscht eine schiefe Ebene hinunter.

- a) Skizzieren Sie den Holzklotz und die schiefe Ebene. Zeichnen Sie alle am Holzklotz angreifenden Kräfte ein. Die Längen der Kraftpfeile sollen proportional zu den Beträgen der Kräfte sein.

Hinweis:

- Wegen der geringen Gleitgeschwindigkeit kann man den Luftwiderstand vernachlässigen.

- b) Formulieren Sie das Grundgesetz der Mechanik ...

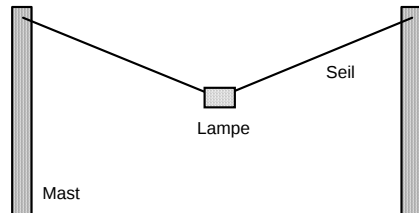
- i) ... in vektorieller Form.
- ii) ... in skalarer Form.

Hinweise zu ii):

- Führen Sie ein geeignetes zweidimensionales Koordinatensystem ein.
- Formulieren Sie für die beiden Koordinatenrichtungen je das Grundgesetz der Mechanik.
- In den beiden Gleichungen stehen je die Kraftkomponenten bezüglich der jeweiligen Koordinatenrichtungen.

- c) Nun wird der Neigungswinkel der schiefen Ebene zur Horizontalen etwas vergrößert. Beurteilen Sie, ob und wie sich ...
- ... die am Holzklotz angreifenden Kräfte verändern.
 - ... die Bewegung des Holzklotzes verändert.

2.12 Eine Strassenlampe ist an einem Drahtseil zwischen zwei Masten aufgehängt:



- Skizzieren Sie die Situation auf ein neues Blatt, und zeichnen Sie alle an der Lampe angreifenden Kräfte ein. Die Längen der gezeichneten Kraftpfeile sollen proportional zu den Beträgen der Kräfte sein.
- Man möchte nun wissen, wie lange das Seil mindestens sein muss, damit die Stärke des Impulsstromes durch das Seil einen maximalen Wert $I_{p,max}$ nicht überschreitet. Bekannt seien der Abstand der beiden Masten, die Masse der Lampe sowie die maximal zulässige Impulsstromstärke $I_{p,max}$.
 - Stellen Sie ein vollständiges Gleichungssystem auf, welches die gesuchte minimale Seillänge als Unbekannte enthält.
 - Lösen Sie das Gleichungssystem nach der gesuchten Seillänge auf. Drücken Sie also die gesuchte Seillänge in Abhängigkeit der bekannten Größen aus.

Hinweise:

- Die Stärke des Impulsstromes im Seil ist gleich gross wie eine einzelne an der Lampe angreifende Seilkraft.
- Mit Hilfe eines Strahlensatzes (vgl. Geometrie) kann eine Beziehung zwischen Kräften, die an der Lampe angreifen, und geometrischen Längen formuliert werden.

2.13 Jemand zieht einen Schlitten auf einer ebenen, horizontalen Strasse. Das Seil ist um den Winkel φ zur Horizontalen geneigt. Der Betrag F der Seilkraft sowie die Gleitreibungszahl μ seien bekannt.

Bestimmen Sie die Beschleunigung des Schlittens.

Hinweise:

- Skizzieren Sie den Schlitten, und zeichnen Sie alle am Schlitten angreifenden Kräfte sowie geeignete Komponenten dieser Kräfte ein.
- Stellen Sie ein vollständiges Gleichungssystem auf, welches die gesuchte Beschleunigung als Unbekannte enthält.
- Die ersten beiden Gleichungen des Gleichungssystems sollen das Grundgesetz der Mechanik bzgl. der gewählten Koordinatenrichtungen ausdrücken.
- Lösen Sie das vollständige Gleichungssystem nach der gesuchten Beschleunigung auf.

2.14 Eine Explosion zersprengt einen zunächst ruhenden Stein in drei Stücke. Zwei Stücke ($m_1 = 1.0 \text{ kg}$, $m_2 = 2.0 \text{ kg}$) fliegen rechtwinklig zueinander mit $v_1 = 12 \text{ m/s}$ bzw. $v_2 = 8.0 \text{ m/s}$ fort. Das dritte Stück fliegt mit $v_3 = 40 \text{ m/s}$ weg.

Bestimmen Sie die Bewegungsrichtung und die Masse des dritten Stückes.

Hinweise:

- Skizzieren Sie die Situation, und zeichnen Sie die Impulsvektoren der drei Steinstücke ein.
- Formulieren Sie die Impulserhaltung.

Lösungen

2.1 a) vor dem Aufprall:

$$p = m \cdot v = 80 \text{ t} \cdot 9.0 \text{ km/h} = 80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \frac{9.0}{3.6} \text{ m/s} = 2.0 \cdot 10^5 \text{ Hy}$$

nach dem Aufprall:

$$p' = m \cdot v' = 80 \text{ t} \cdot (-5.4 \text{ km/h}) = 80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \frac{-5.4}{3.6} \text{ m/s} = -1.2 \cdot 10^5 \text{ Hy}$$

b) $\Delta p = p' - p = -3.2 \cdot 10^5 \text{ Hy}$

$\Rightarrow$ Es sind $3.2 \cdot 10^5 \text{ Hy}$ abgeflossen.

2.2 Impulserhaltung

$$p_1 + p_2 = p'$$

$$p_1 = m_1 v_1$$

$$p_2 = m_2 v_2$$

$$p' = (m_1 + m_2) v'$$

$$m_1 = 2 m_2$$

$$v_1 = -2 v_2$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{2} v_1 = -v_2$$

2.3 Die Summe des im Jungen und im Wagen gespeicherten Impulses bleibt konstant.

Der Wagen fährt nach dem Absprung ...

a) ... mit unveränderter Geschwindigkeit.

b) ... vorwärts mit der Geschwindigkeit 8.0 m/s.

c) ... rückwärts mit der Geschwindigkeit 4.0 m/s

2.4 Bei einer mittleren Impulsstromstärke $I_{p,mittel}$ fliesst in der Zeitspanne Δt der Impuls Δp in den Ball hinein.

$$\Delta p = m \Delta v$$

$$\Delta p = I_{p,mittel} \Delta t$$

$$\Rightarrow I_{p,mittel} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{0.500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}}{0.10 \text{ s}} = 50 \text{ Hy/s}$$

2.5 ...

2.6 ...

2.7 Die Summe aller Impulsstromstärken ist gleich Null, d.h. es fliesst pro Zeiteinheit gleich viel Impuls in den Körper hinein wie aus dem Körper heraus.

Aus der Impulsbilanz folgt, dass dann auch die Impulsänderungsrate, d.h. die Änderungsrate des im Körper gespeicherten Impulses, gleich Null ist.

Der Impulsinhalt des Körpers bleibt also konstant.

$\Rightarrow$ Der Körper bewegt sich mit unveränderter, konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter.

Im Spezialfall, dass der Körper in Ruhe war, bleibt er in Ruhe.

2.8 a) ...

b) ...

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 0 \leq t \leq 5 \text{ s:} \quad & I_{pZ} - I_{pR} = \dot{p}_1 \\ & \Rightarrow \dot{p}_1 = 24 \text{ Hy/s} - 16 \text{ Hy/s} = 8 \text{ Hy/s} \\ 5 \text{ s} \leq t \leq t_x: \quad & -I_{pR} = \dot{p}_2 \\ & \Rightarrow \dot{p}_2 = -16 \text{ Hy/s} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \text{i)} \quad \Delta p_1 = \dot{p}_1 \Delta t_1 = 8 \text{ Hy/s} \cdot 5 \text{ s} = 40 \text{ Hy}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & v_1 = v_0 + \Delta v_1 \\ & \Delta p_1 = m \Delta v_1 \\ & \Rightarrow v_1 = v_0 + \frac{\Delta p_1}{m} = 0 \text{ m/s} + \frac{40 \text{ Hy}}{2.0 \text{ kg}} = 20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \\ & \Rightarrow \Delta p_2 = -\Delta p_1 = -40 \text{ Hy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad & \Delta t_2 = t_x - t_1 \\ & \Delta p_2 = \dot{p}_2 \Delta t_2 \\ & \Rightarrow t_x = t_1 + \frac{\Delta p_2}{\dot{p}_2} = 5.0 \text{ s} + \frac{-40 \text{ Hy}}{-16 \text{ Hy/s}} = 7.5 \text{ s} \end{aligned}$$

- 2.9 a) Bezeichnungen:
- $\dot{p}_L$ = Impulsänderungsrate Lokomotive
 - $\dot{p}_1$ = Impulsänderungsrate erster Wagen
 - $\dot{p}_2$ = Impulsänderungsrate zweiter Wagen
 - I_{pL1} = Impulsstromstärke Lokomotive - erster Wagen (Kupplung)
 - I_{pL2} = Impulsstromstärke erster Wagen - zweiter Wagen (Kupplung)
 - I_{pLA} = Impulsstromstärke Boden - Lok (Haftreibung Antriebsräder)
 - I_{pLR} = Impulsstromstärke Lok - Boden (Rollreibung Antriebsräder)
 - I_{pLL} = Impulsstromstärke Lok - Luft (Luftwiderstand)
 - I_{p1R} = Impulsstromstärke erster Wagen - Boden (Rollreibung)
 - I_{p1L} = Impulsstromstärke erster Wagen - Luft (Luftwiderstand)
 - I_{p2R} = Impulsstromstärke zweiter Wagen - Boden (Rollreibung)
 - I_{p2L} = Impulsstromstärke zweiter Wagen - Luft (Luftwiderstand)

Impulsbilanz Lokomotive:

$$I_{pLA} - I_{pL1} - I_{pLR} - I_{pLL} = \dot{p}_L$$

Impulsbilanz erster Wagen:

$$I_{pL1} - I_{p12} - I_{p1R} - I_{p1L} = \dot{p}_1$$

Impulsbilanz zweiter Wagen:

$$I_{p12} - I_{p2R} - I_{p2L} = \dot{p}_2$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & I_{pL1} - I_{p12} - I_{p1R} - I_{p1L} = \dot{p}_1 \quad (\text{Impulsbilanz erster Wagen}) \\ & I_{p,\text{Reibung}} = I_{p1R} + I_{p1L} \\ & \dot{p}_1 = m_1 \cdot \dot{v} \\ & \Rightarrow I_{p,\text{Reibung}} = I_{pL1} - I_{p12} - m_1 \cdot \dot{v} = 25 \cdot 10^3 \text{ Hy/s} - 14 \cdot 10^3 \text{ Hy/s} - (16 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 0.50 \text{ m/s}^2) = 3.0 \cdot 10^3 \text{ Hy/s} \end{aligned}$$

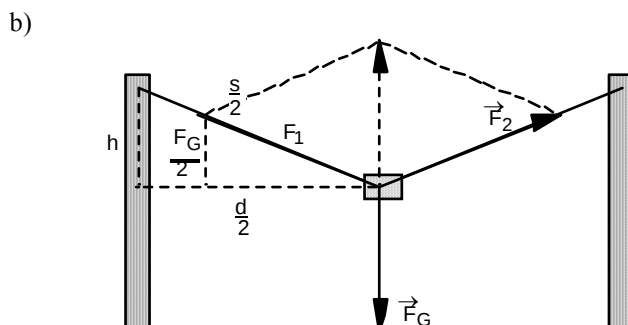
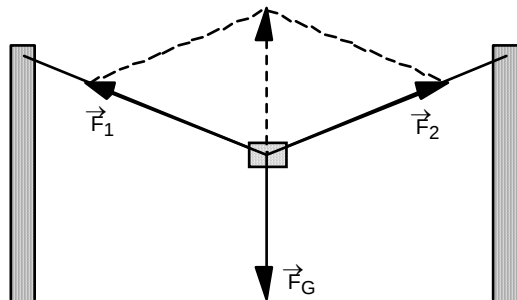
2.10 a) ...

- b) ...
- c) $I_{pG} - I_{pL} = \dot{p}$ (Annahme: positive Richtung nach unten)
wobei: I_{pG} = Stromstärke des aus dem Gravitationsfeld zufließenden Impulses
 I_{pL} = Stromstärke des wegen des Luftwiderstandes an die Luft abfließenden Impulses
- d) i) $\dot{p} = m \cdot \dot{v}$
ii) $I_{pG} = m \cdot g$
 $I_{pL} = k \cdot v^2$
 $\dot{v} = g - \frac{k}{m} v^2$
- e) ...

2.11 a) Kräfte: Gewichtskraft, Normalkraft, Gleitreibungskraft

- b) i) $\vec{F}_G + \vec{F}_N + \vec{F}_R = m \cdot \vec{v}$
ii) Annahmen:
- Die positive x-Richtung zeigt hangabwärts.
- Die positive y-Richtung zeigt senkrecht aus dem Boden heraus.
- Im Grundgesetz der Mechanik werden die Beträge der Kraftkomponenten aufgeführt.
Grundgesetz der Mechanik:
- in x-Richtung: $F_{Gx} - F_R = m \cdot \dot{v}_x$
- in y-Richtung: $-F_{Gy} + F_N = 0$
- c) i) Gewichtskraft: Richtung und Betrag bleiben unverändert
Normalkraft: Richtung verändert sich, Betrag wird kleiner
Gleitreibungskraft: Richtung verändert sich, Betrag wird kleiner
ii) Die Beschleunigung nimmt zu.

2.12 a) An der Lampe greifen drei Kräfte an: die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ sowie die beiden betragsmässig gleich grossen Seilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$.
Der in der folgenden Abbildung eingezeichnete gestrichelte Pfeil stellt die Summe $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ dar, welche betragsmässig gleich gross ist wie der Betrag von $\vec{F}_G$.



$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{F_G}{2} = \frac{h}{\frac{s}{2}} \quad (2. \text{ Strahlensatz}) \\ & F_1 = I_{p,\max} \\ & F_G = m \cdot g \\ & \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

- 4 Gleichungen
- 4 Unbekannte: h, s, F_G, F_1
- Bekannte: $I_{p,\max}, m, g, d$

$$\text{ii)} \quad s = \frac{2 \cdot d \cdot I_{p,\max}}{\sqrt{4 \cdot I_{p,\max}^2 - (m \cdot g)^2}}$$

2.13 Annahmen:

- positive x-Richtung: horizontale Bewegungsrichtung des Schlittens
- positive y-Richtung: senkrecht nach oben

Bezeichnungen:

- $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ = Kraft, mit welcher am Schlitten gezogen wird
- $\vec{F}_G$ = Gewichtskraft (in negativer y-Richtung)
- $\vec{F}_N$ = Normalkraft (in positiver y-Richtung)
- $\vec{F}_R$ = Reibungskraft (in negativer x-Richtung)

Gleichungssystem:

- $F_x - F_R = m \cdot \dot{v}$ (Grundgesetz der Mechanik in x-Richtung)
 - $F_y + F_N - F_G = 0$ (Grundgesetz der Mechanik in y-Richtung)
 - $F_R = \mu \cdot F_N$
 - $F_G = m \cdot g$
 - $\sin(\varphi) = \frac{F_y}{F}$
 - $\cos(\varphi) = \frac{F_x}{F}$
-

$$\Rightarrow \dot{v} = \frac{F}{m} (\cos(\varphi) + \mu \cdot \sin(\varphi)) - \mu \cdot g$$

2.14 Impulserhaltung:

- Die (vektorielle) Summe der Impulse der drei Stücke ist vor und nach der Explosion je der Nullvektor.
- $m_3 = 0.5 \text{ kg}$