

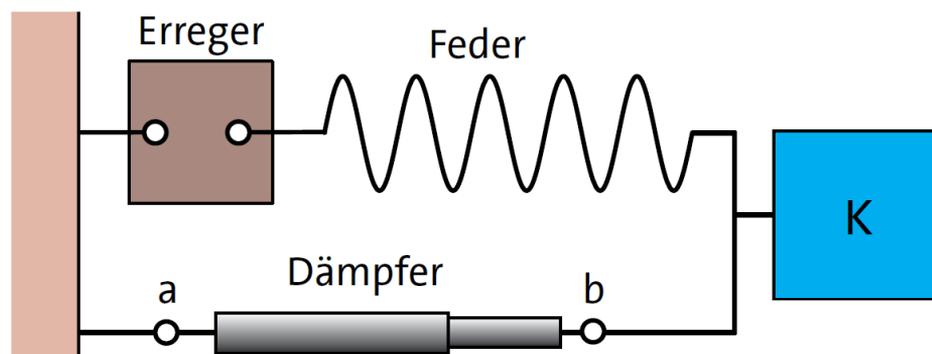
## Aufgaben 4      Schwingungen Erzwungene Schwingung, Resonanz

### Lernziele

- verstehen, was eine erzwungene Schwingung ist.
- wissen und verstehen, was die Eigenfrequenz eines Schwingers, ein Erreger und die Erregerfrequenz sind.
- wissen und verstehen, dass bei einer erzwungenen Schwingung die im zeitlichen Mittel vom Erreger zum Schwinger fließende Energie im Dämpfer dissipiert wird.
- wissen, von welchen Größen die Energie abhängt, die bei einer erzwungenen Schwingung im Dämpfer im zeitlichen Mittel dissipiert wird.
- wissen, dass eine erzwungene Schwingung einen Einschwingvorgang durchläuft.
- aus einem grafisch dargestellten zeitlichen Verlauf einer Schwingungsgröße den Einschwingvorgang und die stationäre Phase einer erzwungenen Schwingung erkennen können.
- wissen, dass bei einer sinusförmig angeregten erzwungenen Schwingung die Frequenz in der stationären Phase gleich gross ist wie die Erregerfrequenz.
- das mathematische Modell zur Beschreibung einer erzwungenen mechanischen Schwingung kennen und verstehen.
- das Phänomen Resonanz kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine Resonanzkurve ist.
- den qualitativen Verlauf einer Resonanzkurve kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass bei Resonanz der zeitlich gemittelte Energiestrom vom Erreger zum Schwinger maximal ist.
- wissen und verstehen, von welchen Größen die Resonanzfrequenz abhängt.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

### Aufgaben

- 4.1 Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines Federschwingers (Lehrbuch KPK 3, Abb. 2.3, Seite 22):



Die Koordinatensysteme (Ort  $x$  des Schwingerkörpers, Ort  $x_E$  des linken Federendes) sollen wie folgt festgelegt werden:

- Die Schwingung soll in  $x$ -Richtung erfolgen.
- Die positiven  $x$ - und  $x_E$ -Richtungen sollen nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei  $x = x_E = 0$  liegen.

Am Schwingerkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft  $\vec{F}_F$  (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft  $\vec{F}_D$  (Kraft, die der Dämpfer ausübt) (siehe Unterricht).

- Formulieren Sie für den Schwingerkörper die skalare  $x$ -Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.
- Beurteilen Sie, ob und wie die drei Größen in der in a) formulierten Gleichung vom Ort  $x$ , der Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  und der Beschleunigung  $a = \dot{v} = \ddot{x}$  des Schwingerkörpers sowie vom Ort  $x_E$  des linken Federendes abhängen.  $x$ ,  $v$ ,  $a$  und  $x_E$  sind dabei jeweils die skalaren  $x$ -Komponenten der entsprechenden Vektoren.  
Setzen Sie dann die drei Ausdrücke in das Ergebnis von a) ein.

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf des Ortes  $x_E$  des linken Federendes sinus-förmig ist, d.h.

$$x_E = x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t)$$

lautet der zeitliche Verlauf des Ortes  $x$  des Schwingkörpers bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

$$x = x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

wobei:  $\delta := \frac{k}{2m}$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0, \text{ schwache Dämpfung})$$

Im eingeschwungenen bzw. stationären Zustand, d.h. für  $t \rightarrow \infty$ , gilt:

$$x = x(t) = \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Dabei gilt für die Amplitude  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega_E) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}} \hat{x}_E$$

c) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Ortsamplitude  $\hat{x}$  maximal ist für

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Hinweise:

- Es genügt zu zeigen, dass der Ausdruck unter der Wurzel im Nenner minimal ist.
- Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in  $z := \omega_E^2$ .
- Das Maximum bzw. Minimum einer quadratischen Funktion liegt an der Stelle des Scheitelpunktes des Funktionsgraphen.
- Um den Scheitelpunkt zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform umgeformt werden.

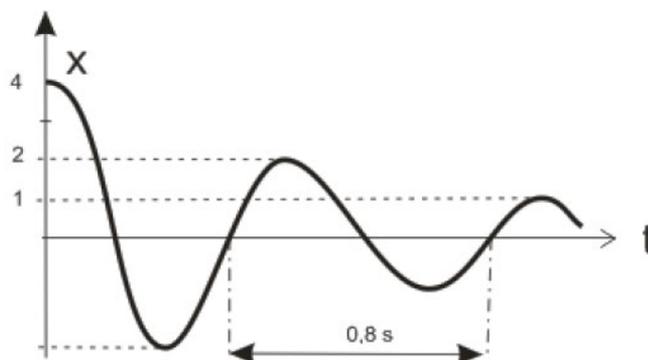
d) Bestimmen Sie für den eingeschwungenen Zustand den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit  $v = v(t) = \dot{x}(t)$  des Schwingkörpers sowie die dazugehörige Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$ .

e) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  maximal ist für  $\omega_E = \omega_0$

Hinweis:

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung das globale Maximum der Funktion  $\hat{v} = \hat{v}(\omega_E)$ .

4.2 Erfährt ein schwingungsfähiges Bauteil in einem mechanischen Aufbau einen Schlag, führt es eine gedämpfte Schwingung aus. Der zeitliche Verlauf des Ausschlags  $x$  sieht wie folgt aus:



Die in der Grafik angegebenen Grössen sollen auf drei signifikante Stellen genau angenommen werden, also  $0.8 = 0.800$ ,  $1 = 1.00$ ,  $2 = 2.00$ ,  $4 = 4.00$ .

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

- a) Bestimmen Sie ...
- i) ... die Kreisfrequenz  $\omega_d$  der gedämpften Schwingung.
  - ii) ... die Dämpfungskonstante  $\delta$ .

Hinweise:

- Die Hochpunkte des Grafen, d.h. die Zeitpunkte, zu welchen der Ausdruck  $x(t) = \dots$  (siehe Unterricht) jeweils ein lokales Maximum annimmt, liegen 0.8 s auseinander (ohne Beweis).
- Zu diesen Zeitpunkten nimmt der Sinusterm  $\sin(\omega_d t + \varphi)$  im Ausdruck  $x(t) = \dots$  jeweils den gleichen Wert ( $< 1$ ) an.

Wird das Bauteil von aussen mit der Frequenz  $\omega_E$  angeregt, ergibt sich eine erzwungene Schwingung.

- b) Bestimmen Sie die Frequenz  $\omega_E$ , bei welcher ...
- i) ... die Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  der erzwungenen Schwingung maximal ist.
  - ii) ... die Ortsamplitude  $\hat{x}$  der erzwungenen Schwingung maximal ist.

Hinweis:

- Verwenden Sie die Ergebnisse aus a).

4.3 Führen Sie in Moodle den [Test 4.1](#) durch.

### Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

#### 2 Resonanz

- 2.1 Was ist Resonanz? (Seite 21)
- 2.2 Resonanz eines mechanischen Schwingers (Seiten 21 und 22)

**Lösungen**

- 4.1 a)  $F_F + F_D = \dot{p}$   
 b)  $F_F = -D \cdot (x - x_E)$   
 $F_D = -k \cdot v = -k \cdot \dot{x}$   
 $\dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \cdot \ddot{x}$   
 $\Rightarrow -D \cdot (x - x_E) - k \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$   
 c) ...  
 d)  $v = v(t) = \dot{x}(t) = \hat{x} \omega_E \cos(\omega_E t + \varphi)$   
 $\hat{v} = \hat{v}(\omega_E) = \hat{x} \omega_E = \frac{\omega_0^2 \omega_E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}} \hat{x}_E$   
 e) ...

- 4.2 a) i)  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0.800 \text{ s}} = 7.85 \text{ s}^{-1}$   
 ii)  $t_0 :=$  Zeitpunkt irgendeines lokalen Maximums von  $x(t)$   
 $\frac{x(t_0+T_d)}{x(t_0)} = 0.500$   
 $\frac{x(t_0+T_d)}{x(t_0)} = \frac{\hat{x} e^{-\delta(t_0+T_d)} \sin(\omega_d(t_0+T_d) + \varphi)}{\hat{x} e^{-\delta t_0} \sin(\omega_d t_0 + \varphi)} = e^{-\delta T_d}$   
 -----  
 $\Rightarrow \delta = -\frac{\ln(0.500)}{T_d} = -\frac{\ln(0.500)}{0.800 \text{ s}} = 0.866 \text{ s}^{-1}$

- b) i)  $\omega_E = \omega_0$   
 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$   
 -----  
 $\Rightarrow \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = \dots$  (ungerundete Zahlenwerte aus a)  $= 7.90 \text{ s}^{-1}$   
 ii)  $\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$   
 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$   
 -----  
 $\Rightarrow \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 - \delta^2} = \dots$  (ungerundete Zahlenwerte aus a)  $= 7.81 \text{ s}^{-1}$

4.3 -